Univerza v Ljubljani

Fakulteta za elektrotehniko

Modeliranje kamere

Stanislav Kovačič

MACHINE VISION LABORATORY

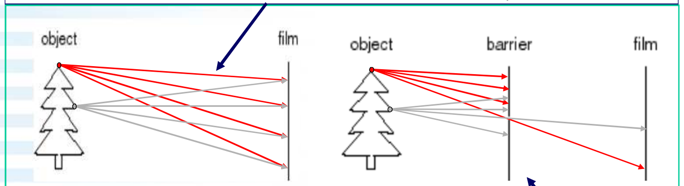
http://vision.fe.uni-lj.si/

Geometrijski modeli kamer

Zanima nas, kako se točke v prostoru preslikajo (projicirajo) v sliko (Geometric camera modeling)

3D → 2D

Prav dobre "slike" na ta način ne moremo pričakovati ☹



Slide source: Seitz

Tako pa že ☺

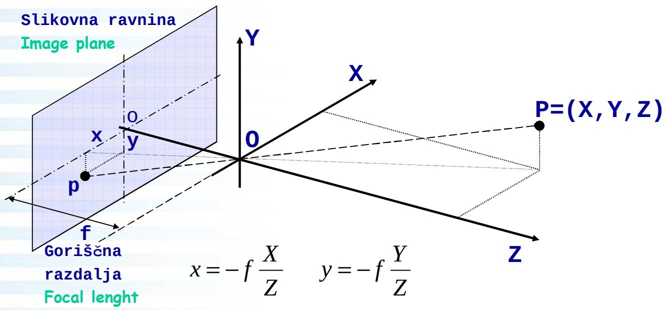
Iz vsebine

- Nastanek slike, osnovno o modeliranju kamere
  - Image formation, basics of camera modeling
- Direktna linearna transformacija (DLT)
  - Direct Linear Transform (DLT)
- Kalibracija kamere (DLT, Tsai)
  - Calibration (DLT, Tsai)
- Rekonstrukcija – "nazaj v prizor"
  - Reconstruction – back from 2D to 3D
- Še nekaj pogledov na modeliranje kamere
  - Camera model revisited
- Distorzija leče
  - Lens distortion

Geometrijski modeli kamer

Centralno projekcijski (perspektivni) model

Perspective projection (pin-hole camera model)

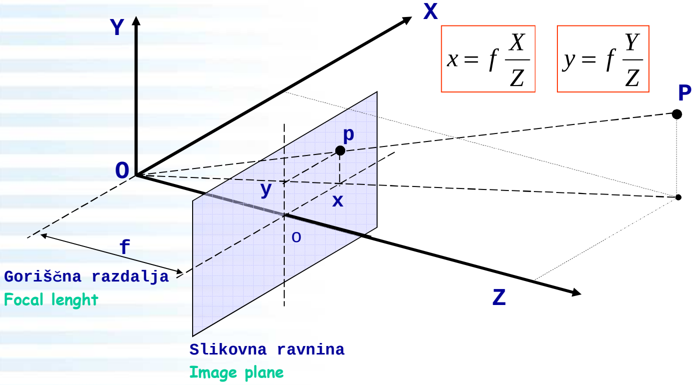


$$x = -f\,\frac{X}{Z} \qquad y = -f\,\frac{Y}{Z}$$

Geometrijski modeli kamer

Optično (projekcijsko) središče premaknemo za slikovno ravnino

$$x = f\,\frac{X}{Z} \qquad y = f\,\frac{Y}{Z}$$



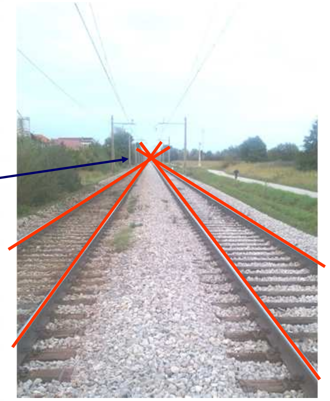
Perspektivna projekcija

Koti se ne ohranjajo

Perspektivna projekcija

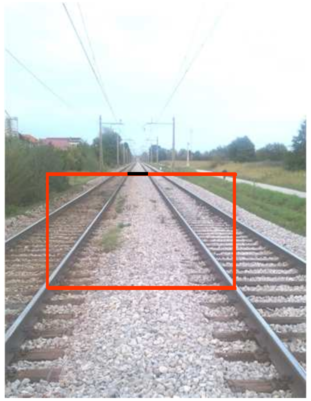
Ravne črte ostanejo ravne

Vzporedne premice se sekajo v skupni točki – bežišču (vanishing point)



Perspektivna projekcija

Dolžine (razdalje) se ne ohranjajo

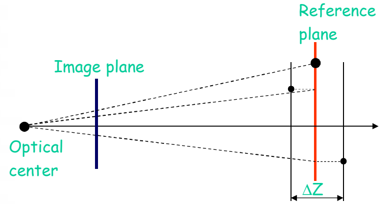


Geometrijski modeli kamer

Šibko perspektivni model (angl. Weak Perspective)

$$x = \frac{f}{Z} X = mX$$

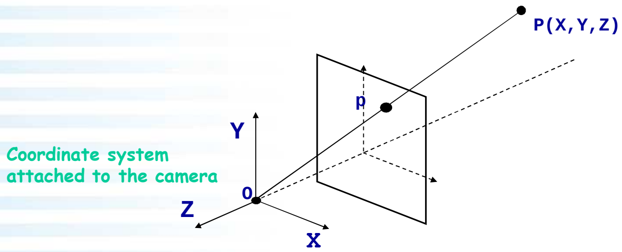
$$y = \frac{f}{Z} Y = mY$$



- Debelina predmeta majhna v primerjavi z razdaljo, $\Delta Z \ll Z$.
- Tanki (planarni) predmeti in/ali na primerno veliki razdalji.
- Ortografska ($m=1$) projekcija s skaliranjem ($m < 1$).

Geometrijski modeli kamer

- Položaj točke P v prostoru (koordinate X, Y, Z) smo podajali glede na koordinatni sistem (k.s.) kamere in točko projicirali v slikovno ravnino.
- Koordinatni sistem kamere pa ni direktno dosegljiv.

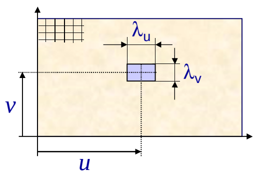


Geometrijski modeli kamer

- (Digitalno) sliko sestavlja polje slikovnih elementov (pixels).
- Slikovne koordinate so diskretne, izražene v "pikslih", (u, v).

$$u = \frac{x}{\lambda_u} = \frac{f}{\lambda_u}\frac{X}{Z} = f_u \frac{X}{Z} = \frac{f_u}{Z} X = m_u X$$

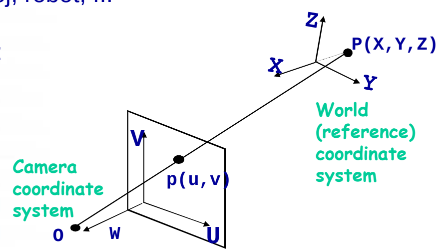
$$v = \frac{y}{\lambda_v} = \frac{f}{\lambda_v}\frac{Y}{Z} = f_v \frac{Y}{Z} = \frac{f_v}{Z} Y = m_v Y$$



- Za veliko praktičnih primerov zadostuje, da določimo λ_u, λ_v (oziroma f_u, f_v) ali m_u, m_v.

Geometrijski modeli kamer

- Položaj predmeta (P) raje definiramo v zunanjem – "svetovnem" - referenčnem k.s., v katerem so koordinate (direktno) merljive.
- k.s. npr. definirajo stene/tla prostora, predmet pravilne oblike (kvader), stroj, robot, ...
- Mapping 3D → 2D:
  - Translate
  - Rotate
  - Project



Geometrijski modeli kamer

- Parametri kamere (angl. *Camera parameters*):
  - Zunanji (angl. *Extrinsic, External*):
    - položaj in smer kamere (k.s. kamere) (*position, orientation*) glede na poznan zunanji koordinatni sistem (referenčni k.s.)
  - Notranji (angl. *Intrinsic, Internal*):
    - parametri, ki povezujejo slikovne koordinate pikslov s k.s. kamere.
- Vsega skupaj 11 ali več parametrov:
  - premik (*translation*) (3), zasuk (*rotation*) (3),
  - goriščna razdalja (1), (*focal length*),
  - optično središče slike (2), (*image center*),
  - velikost piksla (2), (*pixel size*).
- K tem (po potrebi) dodamo še distorzijo leče (angl. *Lens distortion*):
  - odvisno od modela (1 – 5 parametrov).

Iz vsebine

Direktna linearna transformacija (DLT)

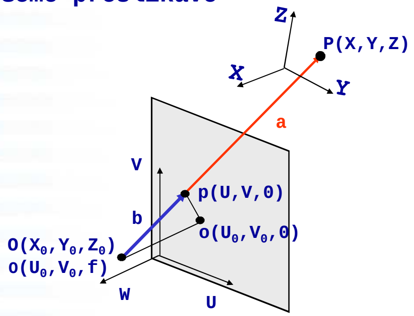
Abdel-Aziz & Carara 1971

Direktna linearna transformacija

Načeloma iščemo preslikavo

$T: \Re^3 \rightarrow \Re^2$

$P \mapsto p$



Direktna linearna transformacija

$p = o + b$

$P = O + a$

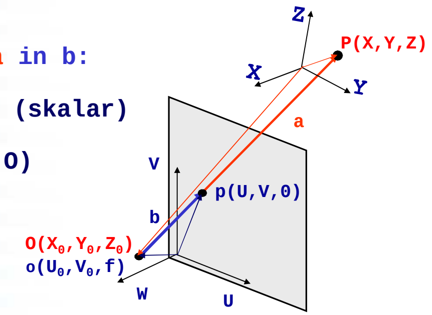
$b = p - o$

$a = P - O$

Kolinearnost a in b:

$b = c\, a,\ c > 0$ (skalar)

$p - o = c(P - O)$



Direktna linearna transformacija

Kolinearnost vektorjev **a** in **b**:

b = c a, c > 0 (skalar)

b izrazimo v k.s. kamere, $b(U_b, V_b, W_b)$

a izrazimo v zunanjem k.s., $a(X_a, Y_a, Z_a)$

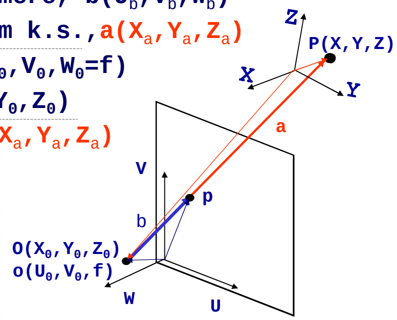
$b = p(U,V,W=0) - o(U_0,V_0,W_0=f)$

$a = P(X,Y,Z) - O(X_0,Y_0,Z_0)$

$b\ (U_b,V_b,W_b) = c\ R\ a(X_a,Y_a,Z_a)$

R = rotacijska matrika

p-o = c R (P-O)



Direktna linearna transformacija

Vstavimo izraz za c v prvi dve enačbi:

$$U - U_0 = -f\,\frac{r_{11}(X-X_0)+r_{12}(Y-Y_0)+r_{13}(Z-Z_0)}{r_{31}(X-X_0)+r_{32}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

$$V - V_0 = -f\,\frac{r_{21}(X-X_0)+r_{22}(Y-Y_0)+r_{23}(Z-Z_0)}{r_{31}(X-X_0)+r_{32}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

Diskretiziramo slikovni koordinati:

$$U - U_0 = \lambda_u (u - u_0)$$ (u_0, v_0) = točka, kjer optična os prebada slikovno ravnino

$$V - V_0 = \lambda_v (v - v_0)$$

Velikost piksla (λ_u, λ_v) - faktorja skaliranja – sta v horizontalni in v vertikalni smeri na splošno različna.

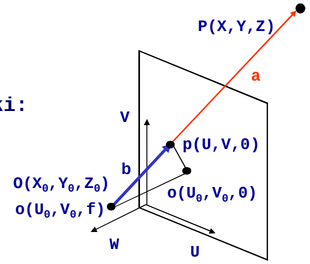
Direktna linearna transformacija

Zapišimo

p-o = c R (P-O)

v komponentni/matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} U-U_0 \\ V-V_0 \\ -f \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-X_0 \\ Y-Y_0 \\ Z-Z_0 \end{bmatrix}$$



$$U - U_0 = c[r_{11}(X-X_0)+r_{12}(Y-Y_0)+r_{13}(Z-Z_0)]$$
$$V - V_0 = c[r_{21}(X-X_0)+r_{22}(Y-Y_0)+r_{23}(Z-Z_0)]$$
$$-f = c[r_{31}(X-X_0)+r_{32}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)]$$

$$c = \frac{-f}{r_{31}(X-X_0)+r_{32}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

Direktna linearna transformacija

$$u - u_0 = -\frac{f}{\lambda_u}\,\frac{r_{11}(X-X_0)+r_{12}(Y-Y_0)+r_{13}(Z-Z_0)}{r_{31}(X-X_0)+r_{32}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

$$v - v_0 = -\frac{f}{\lambda_v}\,\frac{r_{21}(X-X_0)+r_{22}(Y-Y_0)+r_{23}(Z-Z_0)}{r_{31}(X-X_0)+r_{32}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

Standardna in bolj pregledna oblika zapisa:

$$\boxed{u = \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}}$$

$$\boxed{v = \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}}$$

L_i (i = 1,2,...,11) so t.i. parametri DLT

Parametri DLT

$$L_1 = \frac{u_0 r_{31} - f_u r_{11}}{D}, \quad L_2 = \frac{u_0 r_{32} - f_u r_{12}}{D}, \quad L_3 = \frac{u_0 r_{33} - f_u r_{13}}{D}$$

$$L_4 = \frac{(f_u r_{11} - u_0 r_{31}) X_0 + (f_u r_{12} - u_0 r_{32}) Y_0 + (f_u r_{13} - u_0 r_{33}) Z_0}{D}$$

$$L_5 = \frac{v_0 r_{31} - f_v r_{21}}{D}, \quad L_6 = \frac{v_0 r_{32} - f_v r_{22}}{D}, \quad L_7 = \frac{v_0 r_{33} - f_v r_{23}}{D}$$

$$L_8 = \frac{(f_v r_{21} - v_0 r_{31}) X_0 + (f_v r_{22} - v_0 r_{32}) Y_0 + (f_v r_{23} - v_0 r_{33}) Z_0}{D}$$

$$L_9 = \frac{r_{31}}{D}, \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}, \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D} \qquad f_u = \frac{f}{\lambda_u}, \quad f_v = \frac{f}{\lambda_v}$$

$$D = -(X_0 r_{31} + Y_0 r_{32} + Z_0 r_{33})$$

DLT + distorzija leče

$$u + \Delta u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

(Pravzaprav bi morali pisati $u = u_d + \Delta u$)

$$v + \Delta v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

- $\Delta u, \Delta v$: Distorzija leče (odvisna od u,v) $(\Delta u, \Delta v) = (\Delta u(u,v), \Delta v(u,v))$
- Modeliranje distorzije prinese 1,2, ali celo več dodatnih parametrov in nelinearnost.

Ponazoritev izpeljave za *u*

$$u - u_0 = -\frac{f_u r_{11} X + f_u r_{12} Y + f_u r_{13} Z - f_u r_{11} X_0 - f_u r_{12} Y_0 - f_u r_{13} Z_0}{r_{31} X + r_{32} Y + r_{33} Z - (r_{31} X_0 + r_{32} Y_0 + r_{33} Z_0)}$$

$$u - u_0 = -\frac{\frac{f_u r_{11}}{D} X + \frac{f_u r_{12}}{D} Y + \frac{f_u r_{13}}{D} Z - \frac{f_u r_{11} X_0 + f_u r_{12} Y_0 + f_u r_{13} Z_0}{D}}{\frac{r_{31}}{D} X + \frac{r_{32}}{D} Y + \frac{r_{33}}{D} Z + 1}$$

$$u = \frac{u_0 \left(\frac{r_{31}}{D} X + \frac{r_{32}}{D} Y + \frac{r_{33}}{D} Z + 1 \right) - \left(\frac{f_u r_{11}}{D} X + \frac{f_u r_{12}}{D} Y + \frac{f r_{13}}{D} Z \right) + \frac{f_u r_{11} X_0 + f_u r_{12} Y_0 + f_u r_{13} Z_0}{D}}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$u = \frac{\frac{u_0 r_{31} - f_u r_{11}}{D} X + \frac{u_0 r_{32} - f_u r_{12}}{D} Y + \frac{u_0 r_{33} - f r_{13}}{D} Z + \frac{f_u r_{11} X_0 + f_u r_{12} Y_0 + f_u r_{13} Z_0 + u_0 D}{D}}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$\boxed{u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}}$$

2D primer

3D -> 2D

$$\boxed{u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}}$$

$$\boxed{v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}}$$

2D -> 2D (Z = 0)

$$\boxed{u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + 1}}$$

$$\boxed{v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + 1}}$$

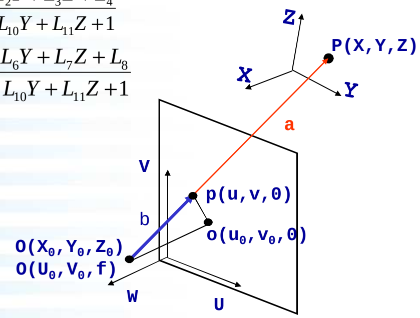
Iz vsebine

- Kalibracija kamere (*Angl. Camera Calibration*)
  - Metoda 1 (DLT)
    - Določitev parametrov preslikave
    - Rekonstrukcija - določanje koordinat točk v prostoru.
  - Metoda 2 (Tsai)

DLT enačbe (še enkrat)

$$u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$



Iz vsebine

Kalibracija - Metoda 1 (DLT)

DLT parametri(še enkrat)

$$\text{E1:}\; L_1 = \frac{u_0 r_{31} - f_u r_{11}}{D}, \quad L_2 = \frac{u_0 r_{32} - f_u r_{12}}{D}, \quad L_3 = \frac{u_0 r_{33} - f_u r_{13}}{D}$$

$$\text{E2:}\; L_4 = \frac{(f_u r_{11} - u_0 r_{31}) X_0 + (f_u r_{12} - u_0 r_{32}) Y_0 + (f_u r_{13} - u_0 r_{33}) Z_0}{D}$$

$$\text{E3:}\; L_5 = \frac{v_0 r_{31} - f_v r_{21}}{D}, \quad L_6 = \frac{v_0 r_{32} - f_v r_{22}}{D}, \quad L_7 = \frac{v_0 r_{33} - f_v r_{23}}{D}$$

$$\text{E4:}\; L_8 = \frac{(f_v r_{21} - v_0 r_{31}) X_0 + (f_v r_{22} - v_0 r_{32}) Y_0 + (f_v r_{23} - v_0 r_{33}) Z_0}{D}$$

$$\text{E5:}\; L_9 = \frac{r_{31}}{D}, \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}, \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D} \quad f_u = \frac{f}{\lambda_u}, \quad f_v = \frac{f}{\lambda_v}$$

$$\text{E6:}\; D = -(X_0 r_{31} + Y_0 r_{32} + Z_0 r_{33})$$

DLT kalibracija

Iščemo neznane vrednosti L_i (i=1,2,....,11)

$$u = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \qquad v = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}$$

$$u(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1) = L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4$$

$$v(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1) = L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8$$

$$L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - uXL_9 - uYL_{10} - uZL_{11} = u$$

$$L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - vXL_9 - vYL_{10} - vZL_{11} = v$$

DLT kalibracija

Vektor b

Matrika A

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1X_1 & -u_1Y_1 & -u_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -v_1X_1 & -v_1Y_1 & -u_1Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_2X_2 & -u_2Y_2 & -u_2Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -v_2X_2 & -v_2Y_2 & -v_2Z_2 \\ . & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & . & & & & & . \\ . & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . & & & . \\ . & & & & & & & & & & . \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_nX_n & -u_nY_n & -u_nZ_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -v_nX_n & -v_nY_n & -v_nZ_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

DLT kalibracija

- **Enačbi točke:** poznamo koordinate točke v prostoru in koordinati iste točke v slikovni ravnini, iščemo neznane parametre modela.

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -uX & -uY & -uZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 & -vX & -vY & -vZ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

- Vsaka točka prispeva dve enačbi.
- Neznanih parametrov je 11.
- Potrebujemo vsaj 6 “kontrolnih” oziroma “kalibracijskih” točk.
- V praksi jih vzamemo (čim)več.

DLT kalibracija

- Iščemo rešitev predoločenega sistema enačb (več enačb kot neznank).
- Metoda najmanjših kvadratov.

$$\mathbf{A}_{2nx11}\mathrm{L} = \mathbf{b}$$

$$[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\mathrm{L} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

$$[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]\mathrm{L} = [\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

$$\mathrm{L} = [\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

DLT kalibracija, X_0, Y_0, Z_0

$$\text{E1:}\quad L_1 = \frac{u_0 r_{31} - f_u r_{11}}{D}, \quad L_2 = \frac{u_0 r_{32} - f_u r_{12}}{D}, \quad L_3 = \frac{u_0 r_{33} - f_u r_{13}}{D}$$

$$\text{E2:}\quad L_4 = \frac{(f_u r_{11} - u_0 r_{31})X_0 + (f_u r_{12} - u_0 r_{32})Y_0 + (f_u r_{13} - u_0 r_{33})Z_0}{D}$$

$$L_4 = -\frac{(u_0 r_{31} - f_u r_{11})}{D} X_0 - \frac{(u_0 r_{32} - f_u r_{12})}{D} Y_0 - \frac{(u_0 r_{33} - f_u r_{13})}{D} Z_0$$

$$\boxed{L_1 X_0 + L_2 Y_0 + L_3 Z_0 = -L_4}$$

DLT kalibracija, X_0, Y_0, Z_0

$$\text{E3:}\quad L_5 = \frac{v_0 r_{31} - f_v r_{21}}{D}, \quad L_6 = \frac{v_0 r_{32} - f_v r_{22}}{D}, \quad L_7 = \frac{v_0 r_{33} - f_v r_{23}}{D}$$

$$\text{E4:}\quad L_8 = \frac{(f_v r_{21} - v_0 r_{31})X_0 + (f_v r_{22} - v_0 r_{32})Y_0 + (f_v r_{23} - v_0 r_{33})Z_0}{D}$$

$$L_8 = -\frac{(v_0 r_{31} - f_v r_{21})}{D} X_0 - \frac{(v_0 r_{32} - f_v r_{22})}{D} Y_0 - \frac{(v_0 r_{33} - f_v r_{23})}{D} Z_0$$

$$\boxed{L_5 X_0 + L_6 Y_0 + L_7 Z_0 = -L_8}$$

DLT kalibracija, X_0, Y_0, Z_0

$$\text{E5:}\quad L_9 = \frac{r_{31}}{D}, \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}, \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$$

$$\text{E6:}\quad D = -(X_0 r_{31} + Y_0 r_{32} + Z_0 r_{33}) \quad / \text{ divide by } D$$

$$-1 = X_0 \frac{r_{31}}{D} + Y_0 \frac{r_{32}}{D} + Z_0 \frac{r_{33}}{D}$$

$$\boxed{L_9 X_0 + L_{10} Y_0 + L_{11} Z_0 = -1}$$

DLT kalibracija, X_0, Y_0, Z_0

$$L_1 X_0 + L_2 Y_0 + L_3 Z_0 = -L_4$$
$$L_5 X_0 + L_6 Y_0 + L_7 Z_0 = -L_8$$
$$L_9 X_0 + L_{10} Y_0 + L_{11} Z_0 = -1$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

DLT kalibracija, u_0, v_0

$$\text{E5:}\; L_9 = \frac{r_{31}}{D},\quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D},\quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$$ / *square, sum*

$$L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 = \frac{1}{D^2}\underbrace{\left(r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2\right)}_{1} = \frac{1}{D^2}$$

Zahtevamo ortogonalnost rotacijske matrike R

Rotacijska matrika R = [r_{ij}] je ortogonalna matrika, $R^T R = I$, (ohranja razdalje).

DLT kalibracija, u_0, v_0

Pogoji ortogonalnosti – za v_0

$$\text{E5:}\; L_9 = \frac{r_{31}}{D},\quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D},\quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$$

$$\text{E3:}\; L_5 = \frac{v_0 r_{31} - f_v r_{21}}{D},\quad L_6 = \frac{v_0 r_{32} - f_v r_{22}}{D},\quad L_7 = \frac{v_0 r_{33} - f_v r_{23}}{D}$$

$$(DL_5)(DL_9) + (DL_6)(DL_{10}) + (DL_7)(DL_{11}) =$$
$$= v_0\underbrace{(r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2)}_{1} - f_v\underbrace{(r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33})}_{0} = v_0$$

DLT kalibracija, u_0, v_0

Pogoji ortogonalnosti – računamo u_0

$$\text{E5:}\; L_9 = \frac{r_{31}}{D},\quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D},\quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$$ / *multiply by D*

$$\text{E1:}\; L_1 = \frac{u_0 r_{31} - f_u r_{11}}{D},\quad L_2 = \frac{u_0 r_{32} - f_u r_{12}}{D},\quad L_3 = \frac{u_0 r_{33} - f_u r_{13}}{D}$$

$$(DL_1)(DL_9) + (DL_2)(DL_{10}) + (DL_3)(DL_{11}) =$$
$$= u_0\underbrace{(r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2)}_{1} - f_u\underbrace{(r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33})}_{0} = u_0$$

DLT kalibracija, u_0, v_0

Pogoji ortogonalnosti - u_0, v_0

$$(DL_1)(DL_9) + (DL_2)(DL_{10}) + (DL_3)(DL_{11}) = u_0$$
$$(DL_5)(DL_9) + (DL_6)(DL_{10}) + (DL_7)(DL_{11}) = v_0$$

$$L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2 = \frac{1}{D^2}$$

$$u_0 = D^2(L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11}) = \frac{L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11}}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}$$

$$v_0 = D^2(L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11}) = \frac{L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11}}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}$$

DLT kalibracija, R=[r_{ij}]

E5: $L_9 = \frac{r_{31}}{D}, \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}, \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$

$r_{31} = DL_9, \quad r_{32} = DL_{10}, \quad r_{33} = DL_{11}$

DLT kalibracija, R=[r_{ij}]

E3: $L_5 = \frac{v_0 r_{31} - f_v r_{21}}{D}, \quad L_6 = \frac{v_0 r_{32} - f_v r_{22}}{D}, \quad L_7 = \frac{v_0 r_{33} - f_v r_{23}}{D}$

E5: $L_9 = \frac{r_{31}}{D}, \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}, \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$

$$L_5 = v_0 L_9 - \frac{f_v r_{21}}{D}, \quad L_6 = v_0 L_{10} - \frac{f_v r_{22}}{D}, \quad L_7 = v_0 L_{11} - \frac{f_v r_{23}}{D}$$

$$r_{21} = \frac{D(v_0 L_9 - L_5)}{f_v}, \quad r_{22} = \frac{D(v_0 L_{10} - L_6)}{f_v}, \quad r_{23} = \frac{D(v_0 L_{11} - L_7)}{f_v}$$

DLT kalibracija, R=[r_{ij}]

E1: $L_1 = \frac{u_0 r_{31} - f_u r_{11}}{D}, \quad L_2 = \frac{u_0 r_{32} - f_u r_{12}}{D}, \quad L_3 = \frac{u_0 r_{33} - f_u r_{13}}{D}$

E5: $L_9 = \frac{r_{31}}{D}, \quad L_{10} = \frac{r_{32}}{D}, \quad L_{11} = \frac{r_{33}}{D}$

$$L_1 = u_0 L_9 - \frac{f_u r_{11}}{D}, \quad L_2 = u_0 L_{10} - \frac{f_u r_{12}}{D}, \quad L_3 = u_0 L_{11} - \frac{f_u r_{13}}{D}$$

$$r_{11} = \frac{D(u_0 L_9 - L_1)}{f_u}, \quad r_{12} = \frac{D(u_0 L_{10} - L_2)}{f_u}, \quad r_{13} = \frac{D(u_0 L_{11} - L_3)}{f_u}$$

DLT kalibracija, R=[r_{ij}]

$$r_{11} = \frac{D(u_0 L_9 - L_1)}{f_u}, \quad r_{12} = \frac{D(u_0 L_{10} - L_2)}{f_u}, \quad r_{13} = \frac{D(u_0 L_{11} - L_3)}{f_u}$$

$$r_{21} = \frac{D(v_0 L_9 - L_5)}{f_v}, \quad r_{22} = \frac{D(v_0 L_{10} - L_6)}{f_v}, \quad r_{23} = \frac{D(v_0 L_{11} - L_7)}{f_v}$$

$$r_{31} = DL_9, \quad r_{32} = DL_{10}, \quad r_{33} = DL_{11}$$

f_u in f_v še ne poznamo

$$f_u = \frac{f}{\lambda_u}, \quad f_v = \frac{f}{\lambda_v}$$

DLT kalibracija, f_u in f_v

Pogoji ortogonalnosti

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = \frac{D^2[(u_0L_9 - L_1)^2 + (u_0L_{10} - L_2)^2 + (u_0L_{11} - L_3)^2]}{f_u^2} = 1$$

$$r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = \frac{D^2[(v_0L_9 - L_5)^2 + (v_0L_{10} - L_6)^2 + (v_0L_{11} - L_7)^2]}{f_v^2} = 1$$

$$f_u^2 = D^2[(u_0L_9 - L_1)^2 + (u_0L_{10} - L_2)^2 + (u_0L_{11} - L_3)^2]$$

$$f_v^2 = D^2[(v_0L_9 - L_5)^2 + (v_0L_{10} - L_6)^2 + (v_0L_{11} - L_7)^2]$$

Kalibracija,...

- Na točnost kalibracije direktno vpliva točnost kalibracijskega vzorca. Praktično pravilo: toleranca vzorca naj bo vsaj za velikostni razred boljša od zahtevane merilne točnosti.
- Kalibracijske točke naj bodo razporejene po vsem prostoru in take, da jih je moč detektirati (v sliki) zanesljivo in točno. Tipičen kalibracijski vzorec je kvader poslikan s šahovnico.
- Posnamemo lahko tudi več slik.
- Še enkrat povejmo:
  ko je sistem kalibriran, ne smemo ničesar več spreminjati.

DLT kalibracija, povzetek

- Kalibracijski "vzorec" -> X_i, Y_i, Z_i, (i=1,...,N)
  - Točke ne smejo biti koplanarne.
  - Točke morajo dobro "pokriti" delovni prostor.
- Slika vzorca, obdelava -> u_i, v_i, (i=1,...,N)
- X_i, Y_i, Z_i, u_i, v_i, LS metoda -> $L_1, ..., L_{11}$
- $L_1, ..., L_{11}$ -> X_0, Y_0, Z_0
- $L_1, ..., L_{11}$, ortogonalnost -> u_0, v_0
- $L_1, ..., L_{11}, u_0, v_0, \perp$ -> f_u, f_v
- $L_1, ..., L_{11}, u_0, v_0, f_u, f_v\ \perp$ -> $R=[r_{ij}]$

Kalibracija,...

- Napako kalibracije se da ovrednotiti:
  - V slikovnem prostoru: enostavno preslikamo kontrolne točke v sliko in izračunamo srednje kvadratično odstopanje izračunanih od izmerjenih vrednosti.
    Še bolje da uporabimo kontrolne točke, ki za kalibracijo niso bile uporabljene.
  - V zunanjem prostoru: potrebna je rekonstrukcija.

Določanje *X,Y,Z*

- Kamera je sedaj “kalibrirana”
  - Dokler ne spremenimo postavitve (obrnemo obroček na objektivu, premaknemo kamero, ...
- Določanje položaja predmeta:
  - Poznamo parametre modela L
  - Poznamo slikovne koordinate u,v
  - Iščemo koordinate točk v prizoru X,Y,Z
- DLT model nam slika prostorske koordinate v slikovne.
  - Rabimo obratno preslikavo.
  - Kako?

Položaj predmeta *X,Y,Z*

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} L_1 - uL_9 & L_2 - uL_{10} & L_3 - uL_{11} \\ L_5 - vL_9 & L_6 - vL_{10} & L_7 - vL_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_4 - u \\ L_8 - v \end{bmatrix}$$

Vsaka točka v sliki (u,v)
prispeva dve enačbi,
toda prinese tri neznanke (X,Y,Z)

Položaj predmeta *X,Y,Z*

Ponovno obrnemo enačbi DLT

$$u = \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \qquad v = \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1}$$

$$L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4 - uXL_9 - uYL_{10} - uZL_{11} = u$$

$$L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8 - vXL_9 - vYL_{10} - vZL_{11} = v$$

$$(L_1 - uL_9)X + (L_2 - uL_{10})Y + (L_3 - uL_{11})Z = L_4 - u$$

$$(L_5 - vL_9)X + (L_6 - vL_{10})Y + (L_7 - vL_{11})Z = L_8 - v$$

Položaj predmeta *X,Y,Z*

Potrebujemo dodatne omejitve

...

ali več informacije

Položaj predmeta *X,Y,Z*

Pomaga več slik, več (m > 1) kamer ene in iste točke v prostoru.

$$\begin{bmatrix} (L_1-uL_9)_1 & (L_2-uL_{10})_1 & (L_3-uL_{11})_1 \\ (L_5-vL_9)_1 & (L_6-vL_{10})_1 & (L_7-vL_{11})_1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ (L_1-uL_9)_m & (L_2-uL_{10})_m & (L_3-uL_{11})_m \\ (L_5-vL_9)_m & (L_6-vL_{10})_m & (L_7-vL_{11})_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_4-u)_1 \\ (L_8-v)_1 \\ . \\ . \\ (L_4-u)_m \\ (L_8-v)_m \end{bmatrix}$$

Enačbe spet rešimo z metodo najmanjših kvadratov

Iz vsebine

Kalibracija - Metoda 2 (Tsai '85)

Položaj predmeta *X,Y,Z*

- "Postavimo" (kalibrirane) kamere
  - Potrebujemo vsaj dve sliki (dve kameri)
- Posnamemo slike istega prizora
  - Sedaj imamo več slik istega prizora
- Analiziramo slike (vsako zase)
  - Določimo koordinate "pomembnih" točk v slikah
- Bistven problem: katere točke v teh slikah upodabljajo isto točko prizora?
  - Problem korespondence – stereo ujemanja (Corespondence problem)
- Stereo primerjanje (Stereo Matching)

Tsai - kalibracija

$$x = u' - u_0 = -\frac{f}{\lambda_u}\frac{U}{W} = -f_u \frac{r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + X_0}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + Z_0}$$

$$y = v' - v_0 = -\frac{f}{\lambda_v}\frac{V}{W} = -f_v \frac{r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + Y_0}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + Z_0}$$

$$x_i f_v (r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + Y_0) = y_i f_u (r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + X_0)$$

Opomba: najprej zasuk, potem premik

Tsai - kalibracija

$$x_i f_v (r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + Y_0) = y_i f_u (r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + X_0)$$

$$x_i X_i v_1 + x_i Y_i v_2 + x_i Z_i v_3 + x_i v_4 - y_i X_i v_5 - y_i Y_i v_6 - y_i Z_i v_7 - y_i v_8 = 0$$

$$\begin{array}{llll} v_1 = r_{21} & v_2 = r_{22} & v_3 = r_{23} & v_4 = Y_0 \\ v_5 = \alpha r_{11} & v_6 = \alpha r_{12} & v_7 = \alpha r_{13} & v_8 = \alpha X_0 \\ \alpha = f_u / f_v & & & \end{array}$$

Vsaka točka prispeva eno enačbo

N točk -> N enačb

$$\mathbf{A}\mathrm{v} = 0$$

Tsai - kalibracija

Poznamo rešitev do konstante

$$\mathrm{v} = \gamma [r_{21}, r_{22}, r_{23}, Y_0, \alpha r_{11}, \alpha r_{12}, \alpha r_{13}, \alpha X_0]$$

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\gamma^2 (r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2)} = |\gamma|$$

$$\sqrt{v_5^2 + v_6^2 + v_7^2} = \sqrt{\gamma^2 \alpha^2 (r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2)} = \alpha |\gamma|, \quad \alpha > 0$$

Poznamo 1. in 2. vrstico matrike R

Določimo 3. vrstico kot vektorski produkt prvih dveh

Tsai - kalibracija

$$\mathbf{A}\mathrm{v} = 0 \qquad rang(\mathbf{A}) = 7, \qquad (N >= 7)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 X_1 & x_1 Y_1 & x_1 Z_1 & x_1 & -y_1 X_1 & -y_1 Y_1 & -y_1 Z_1 & -y_1 \\ x_2 X_2 & x_2 Y_2 & x_2 Z_2 & x_2 & -y_2 X_2 & -y_2 Y_2 & -y_2 Z_2 & -y_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ x_N X_N & x_N Y_N & x_N Z_N & x_N & -y_N X_N & -y_N Y_N & -y_N Z_N & -y_N \end{bmatrix}$$

SVD - Razcep na singularne vrednosti

A = U D V^T -> Rešitev: v

v: stolpec matrike V za singularno vrednost v matriki D z vrednostjo 0.

Tsai - kalibracija

Določili smo rotacijsko matriko, komponenti translacije X_0, Y_0, manjkata nam še Z_0 in f_u

$$\mathrm{v} = \gamma [r_{21}, r_{22}, r_{23}, Y_0, \alpha r_{11}, \alpha r_{12}, \alpha r_{13}, \alpha X_0]$$

$$x_i (r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + Z_0) = -f_u (r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + X_0)$$

Spet z metodo najmanjših kvadratov rešimo predoločen sistem (za N točk)

Tsai - kalibracija

$$x_i r_{31} X_i + r_{32} Y_i + r_{33} Z_i + x_i Z_0 = -f_u (r_{11} X_i + r_{12} Y_i + r_{13} Z_i + X_0)$$

$$\underbrace{x_i}_{a_{1,j}} Z_0 + \underbrace{(r_{11} X_i + r_{12} Y_i + r_{13} Z_i + X_0)}_{a_{2,j}} f_u = \underbrace{x_i r_{31} X_i + r_{32} Y_i + r_{33} Z_i}_{b_j}$$

$$\boxed{A_{(Nx2)} x_{(2x1)} = b_{(Nx1)}}$$

Spet z metodo najmanjših kvadratov rešimo predoločen sistem (za N točk)

Literatura

- http://kwon3d.com/theory/dlt/dlt.html

- E. Trucco, A. Verri, Introductory Techniques for 3D Computer Vision, Prentice Hall, 1998.
- M. Sonka, V. Hlavač, R. Boyle, Image Processing, Analysis, and Machine Vision, Thomson, 2008.
- R. Tsai, A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the shelf TV cameras and lenses, IEEE RA-3, No.4, 1987, p.323, 344.
- Z. Zhang, “A flexible new technique for camera calibration”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11):1330–1334, 2000.

Tsai - kalibracija

Določili smo:

- **rotacijsko matriko R,**
- **komponente translacije X_0, Y_0, Z_0**
- **ef. goriščni razdalji f_u, f_v.**

Določimo še optični center:

- **spet več možnosti**